Centre universitaire de Mila
Institut des sciences et de la technologie
Deuxième année LMD Mathématiques 2019/2020

Matière : *Algèbre 4* Durée : 1 h
Responsable : *Y. Halim*

Examen final
Le 07/11/2020

Exercice 1 : (10 pts)

I) $\mathbb{R}^{n-1}$ est-il un hyperplan de $\mathbb{R}^n$? Donner la forme générale des formes linéaires sur $\mathbb{R}^n$, en déduire une caractérisation de ses hyperplans.

II) Soient $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ les formes linéaires sur $\mathbb{R}_2[X]$ définies par

$$\varphi_1(P) = P(0),\ \varphi_2(P) = P'(1),\ \varphi_3(P) = \int_0^1 tP(t)dt.$$

1. Montrer que la famille $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ est une base du dual de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer sa base antéduale.

Exercice 2 : (10 pts)

I) Soit l'application

$$\begin{array}{llll} f_\alpha : & \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \to \mathbb{R} \\ & ((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) & \mapsto x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3 + \alpha x_1y_2 + \alpha x_2y_1 \end{array}$$

1. Montrer que f_α est une forme bilinéaire symétriques.
2. Déterminer la forme quadratique associé a f_α.
3. Déterminer la matrice de f_α dans la base $\{\varepsilon_1 = (1,0,0), \varepsilon_2 = (0,1,0), \varepsilon_3 = (1,0,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$.
4. Déterminer suivant les valeurs de α le rang de f_α
5. Déterminer les valeurs de α pour f_α soit non dégénérée.

II) Soit E un espace vectoriel et A, B deux parties de E.
Montrer que

$$(A \cup B)^\perp = A^\perp \cap B^\perp$$

Bon courage