المركز الجامعي عبد الحفيظ بو الصوف
معهد العلوم الاقتصادية و التجارية وعلوم التسيير

2021/2020
رياضيات 1
مسؤول المقياس: أ. حجاج مراد

المحور الثالث

الإشتقاق

المحاضرة : 05

أ- نظريات و تعاريف

1- تعريف

لتكن $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة حقيقية معرفة على مجال مفتوح I ، ولتكن x_0 نقطة من I

نقول أن f قابلة للإشتقاق عند النقطة x_0 إذا كانت النهاية

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

موجودة في $\mathbb{R}$ ونرمز لهذه النهاية بـ $f'(x_0)$ ونسميها مشتقة الدالة f عند النقطة x_0

- نقول أن f قابلة للإشتقاق على المجال I إذا كانت قابلة للإشتقاق عند كل نقطة منه
- وهندسيا f قابلة للإشتقاق عند النقطة x_0 معناه أن منحنى الدالة f يقبل مماسا عند النقطة $\left(x_0 \ , \ f(x_0)\right)$ ميله $f'(x_0)$
- إذا كانت f قابلة للإشتقاق عند النقطة x_0 فإنها مستمرة في هذه النقطة

2- قواعد الإشتقاق

الدالة	المشتقة
af	f'
$f+g$	$f'+g'$
$f.g$	$f'g+fg'$
$\sqrt{f}$	$\frac{f'}{2\sqrt{f}}$
$\frac{1}{f}$, $\left(\frac{f}{g}\right)$	$-\frac{f'}{f^2}$, $\left(\frac{f'g-fg'}{g^2}\right)$
$\frac{1}{f^n}$, $n>1$	$-n.\frac{f'}{f^{n+1}}$
Lnf	$\frac{f'}{f}$
e^f	$f'e^f$
$sinf$	$f'cosf$
$cosf$	$-f'sinf$
tgf	$\frac{f'}{cos^2f} = f'(1+tg^2f)$

الدالة	المشتقة
a ثابت	0
ax	a
x^n , $n \geq 1$	nx^{n-1}
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\frac{1}{x^n}$, $n>1$	$-n.\frac{1}{x^{n+1}}$
Lnx	$\frac{1}{x}$
e^x	e^x
$sinx$	$cosx$
$cosx$	$-sinx$
tgx	$\frac{1}{cos^2x} = 1+tg^2x$

3- مشتق الدالة العكسية

لتكن f دالة مستمرة ورتيبة تماما على مجال مفتوح I (فهي تقابل على I)

إذا كانت f قابلة للإشتقاق عند نقطة x_0 من I و $\grave{f}(x_0) \neq 0$ فإن الدالة العكسية $f^{-1}: f(I) \to I$

قابلة للإشتقاق عند النقطة $f(x_0) = y_0$ و $[f^{-1}]\grave{}\,(y_0) = \frac{1}{\grave{f}(x_0)}$

4- **نظرية القيم الوسطى** :

لتكن f دالة معرفة و مستمرة على مجال $[a\,,b]$ إذا كان $f(a).f(b) < 0$: فإنه يوجد عدد حقيقي c

ينتمي إلى المجال $]a\,,\ b[$ حيث: $f(c) = 0$

- إذا كانت f رتيبة تماما فإن c وحيد في $]a\,,\ b[$

5- نظرية رول:

لتكن f دالة معرفة و مستمرة على مجال $[a\,,b]$ وقابلة للإشتقاق على المجال $]a\,,\ b[$ إذا كان $f(a) = f(b)$

فإنه يوجد c من المجال $]a\,,\ b[$ حيث : $\grave{f}(c) = 0$

6- - نظرية التزايدات المنتهية:

لتكن f دالة معرفة و مستمرة على مجال $[a\,,b]$ وقابلة للإشتقاق على المجال $]a\,,\ b[$

إذن يوجد c من المجال $]a\,,\ b[$ حيث : $f(b) - f(a) = (b-a)\grave{f}(c)$

مثال:

بإستعمال نظرية التزايدات المنتهية أثبت أن : $\forall x \in \mathbb{R}\,, -|x| \leq sinx \leq |x|$

ليكن $x \in \mathbb{R}$ نطبق النظرية على الدالة $f(x) = sinx$ في المجال الذي حديه $0\,,\ x$

إذن يوجد c ينتمي إلى هذا المجال حيث :

$sinx - sin0 = (x-0)cosc$ ، و بما أن $sin0 = 0$ و $|cosc| \leq 1$ فإن:

$|sinx| \leq |x|$ وهوالمطلوب

7- قاعدة لوبيتال

لتكن f و g دالتين قابلتين للإشتقاق على المجال $]a\,,b[$ و عنصر α من هذا المجال

إذا كانت النهاية $\lim_{x\to\alpha}\frac{\grave{f}(x)}{\grave{g}(x)}$ موجودة

فإن النهاية : $\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{g(x)-g(\alpha)}$ موجودة

ولدينا $\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{g(x)-g(\alpha)} = \lim_{x\to\alpha}\frac{\grave{f}(x)}{\grave{g}(x)}$