

Solution Exercice 1

1. Soit la variable aléatoire T_s qui donne le temps de service d'un client

Le taux moyen de service par minute : $\mu = 1/3$

$T_s \sim \text{Exp}(\mu)$

$$P(T_s > 6) = e^{-\mu \cdot 6} = e^{-2} = 0.135$$

2. La file d'attente peut être modélisé par un système M/M/1 (un seul guichet)

$$\lambda = 10/60 = 1/6$$

$$\mu = 1/3$$

$\lambda < \mu$, donc, le système est stationnaire

$$\rho = \lambda / \mu = 1/2$$

3.

P_0 : Probabilité que le système est vide (Aucun client dans le système)	$P_0 = 1 - \rho = 1 - \frac{1}{2} = 0.5$
P_w : Probabilité d'attente (la probabilité qu'un client doive faire la queue (au lieu d'être immédiatement servi)	$P_w = \rho = 0.5$
$\bar{N}$: Nombre moyen de clients dans le système	$\bar{N} = \frac{\rho}{1 - \rho} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = 1$
$\bar{N}_q$: Nombre moyen de clients dans la file d'attente	$\bar{N}_q = \frac{\rho^2}{1 - \rho} = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = 0.5$
$\bar{N}_s$: Nombre moyen de clients en service (au guichet)	$\bar{N}_s = \rho = 1 - P_0 = \bar{N} - \bar{N}_q = 0.5$
$\bar{T}$: Temps moyen qu'un client passe dans le système (attente + service). (temps moyen de séjour d'un client dans le système)	$\bar{T} = \frac{\bar{N}}{\lambda} = \frac{\rho}{\lambda(1 - \rho)} = \frac{1}{\mu - \lambda} = 6$
$\bar{T}_q$: Temps moyen d'attente dans la file	$\bar{T}_q = \frac{\rho}{\mu(1 - \rho)} = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = \bar{T} - \bar{T}_s = 3$
$\bar{T}_s$: Temps moyen de service	$\bar{T}_s = \frac{1}{\mu} = 3$

Solution Exercice 2:

Le taux d'arrivée des appareils par heure : $\lambda = \frac{30}{60} = 2$

Page | 2 Le taux de réparation par heure : $\mu = \frac{45}{60} = 4/3$

	M/M/2
Condition de stationnarité	$a = \frac{\lambda}{S\mu} < 1$ $S > \frac{\lambda}{\mu}$ $S > \rho = \frac{3}{2}$ $S=2$ $(a: \text{le taux d'utilisation du système})$
a : Le taux d'utilisation des techniciens	$a = \frac{\lambda}{S\mu} = \frac{2}{2 * \frac{4}{3}} = \frac{3}{4} = 0.75$
P_0 : Probabilité que le système est vide (Aucun appareil dans l'atelier)	$P_0 = \left(\sum_{k=0}^{S-1} \frac{\rho^k}{k!} + \left(\frac{\rho^S}{S!} \frac{1}{1 - \frac{\rho}{S}} \right) \right)^{-1} = \frac{1}{7} = 0.143$
P_w : Probabilité qu'un appareil ne sera pas réparé immédiatement (Tous les techniciens sont occupés)	$P_w = C(S, \rho) = P_0 \times \frac{\rho^S}{(S-1)!(S-\rho)} = \frac{9}{14} \approx 0.643$
$\bar{N}$: Le nombre moyen de machines dans l'atelier (attente + réparation)	$\bar{N} = \rho \left(1 + \frac{C(S, \rho)}{S-\rho} \right) = \frac{3}{2} \left(1 + \frac{9/14}{2 - \frac{3}{2}} \right) = \frac{24}{7} \approx 3.43$
$\bar{N}_Q$: Nombre moyen de machines en panne en attente de réparation	$\bar{N}_Q = \rho \frac{C(S, \rho)}{S-\rho} = \bar{N} - \bar{N}_S = \frac{24}{7} - \frac{3}{2} = \frac{27}{14} \approx 1,93$
$\bar{N}_S$: Nombre moyen de machines en réparation	$\bar{N}_S = \rho = \frac{3}{2} = 1,5$
$\bar{T}$: Temps moyen qu'une machine passe dans l'atelier (attente + réparation)	$\bar{T} = \frac{1}{\mu} \left(1 + \frac{C(S, \rho)}{S-\rho} \right) = \frac{\bar{N}}{\lambda} = \frac{24}{2}$ $\approx 1,7143 \text{ Heures} \approx 103 \text{ minutes}$
$\bar{T}_Q$: Temps moyen d'attente dans la file	$\bar{T}_Q = \frac{C(S, \rho)}{\mu(S-\rho)} = \frac{\bar{N}_Q}{\lambda} = \frac{27}{14} = 0,9643$ $\approx 58 \text{ minutes}$
$\bar{T}_S$: Temps moyen de service	$\bar{T}_S = \frac{1}{\mu} = \frac{3}{4} \text{ heures} = 45 \text{ minutes}$

Solution Exercice 3:

Unité du temps : heure

Le taux d'arrivée des clients par heure: $\lambda = 60$

Le taux de service par heure : $\mu = 18$

Page | 3

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{10}{3}$$

Le système est stationnaire si :

$$a = \frac{\rho}{S} < 1$$

Autrement dit : $S > \rho$

$$S > \frac{10}{3}$$

Le nombre minimal de serveurs est $S = 4$

Coût du service par serveur par heure : **CS=150 DA** (Cost of service per server per unit time)

Coût d'attente dans le système par client par heure : **CWS=100 DA** (Cost of Waiting in the System per customer per unit time)

$$\text{Total cost} = \text{CWS} \times \bar{N} + \text{CS} \times S$$

Nombre de serveurs S	4	5	6	7	8
Taux d'utilisation du système	83,33%	66,67%	55,56%	47,62%	41,67%
P0: Probabilité que le système est vide (Aucun client dans le système)	0,0213	0,0318	0,0346	0,0354	0,0356
Pw: Probabilité d'attente (Probabilité que tous les serveurs soient occupés) (Erlang C)	0,658	0,327	0,148	0,061	0,023
Nombre moyen de clients dans le système (N)	6,6219	3,9867	3,5186	3,3890	3,3498
Nombre moyen de clients en attente (Nq)	3,2886	0,6533	0,1853	0,0557	0,0165
Temps d'attente moyen dans le système (T)	0,1104	0,0664	0,0586	0,0565	0,0558
Temps d'attente moyen dans la file d'attente (Tq)	0,0548	0,0109	0,0031	0,0009	0,0003
Coût des serveurs par heure	600,00 DA	750,00 DA	900,00 DA	1 050,00 DA	1 200,00 DA
Coût d'attente d'un client par heure	662,19 DA	398,67 DA	351,86 DA	338,90 DA	334,98 DA
Coût total	1 262,19 DA	1 148,67 DA	1 251,86 DA	1 388,90 DA	1 534,98 DA

Le nombre de serveurs qui optimise le coût total est S=5

Solution Exercice 4

Le salon de coiffure est un système M/M/1/5.

Le taux d'arrivée des clients $\lambda = 5$

Le taux de service : $\mu = 3$

La capacité maximal du système : $K = 5$

$$\rho = \frac{5}{3}$$

	M/M/1/5	
P_0: Probabilité que le système est vide (Aucun client dans le système)	$P_0 = \begin{cases} \frac{1}{K+1} & \rho = 1 \\ \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}} & \rho \neq 1 \end{cases}$	0,0326
P_K: Probabilité de rejet d'un client	$P_K = \frac{(1-\rho)\rho^K}{1-\rho^{K+1}}$	0,42
$\bar{N}$: Nombre moyen de clients dans le système	$\bar{N} = \frac{\rho(1 - (K+1)\rho^K + K\rho^{K+1})}{(1-\rho)(1-\rho^{K+1})}$	3,79
$\bar{N}_Q$: Nombre moyen de clients dans la file d'attente	$\bar{N}_Q = \sum_{n=1}^K (n-1)P_n = \bar{N} - \bar{N}_S$	2,83
$\bar{N}_S$: Nombre moyen de clients en service (au guichet)	$\bar{N}_S = 1 - P_0$	0,97
$\bar{T}$: Temps moyen qu'un client passe dans le système (attente + service). (temps moyen de séjour d'un client dans le système)	$\bar{T} = \frac{\bar{N}}{\lambda(1 - P_K)}$	1,307 Heures= 78.4 minutes
$\bar{T}_Q$: Temps moyen d'attente dans la file	$\bar{T}_Q = \frac{\bar{N}}{\lambda(1 - P_K)} - \frac{1}{\mu}$	0,974 heure=58,4
$\bar{T}_S$: Temps moyen de service	$\bar{T}_S = \frac{1}{\mu}$	0,33heure=20 minutes